

# Projeto e Estudo Comparativo de um Controlador LQR Aplicado a uma Planta de Segunda Ordem

Gustavo Colpes Ribeiro, Lucas Rossato Rocha, Marcelo Back de Araujo, Giancarlo Daros  
João Pedro Cipriani, André Pacheco Meurer, Rodrigo Padilha Vieira e Vinícius Foletto Montagner  
Universidade Federal de Santa Maria - UFSM  
Santa Maria, Brasil

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Grupo de Eletrônica de Potência e Controle (GEPOC)

Email: colpesgustavo@gmail.com; lucas\_rocha@hotmail.com; marceloback775@gmail.com; giancd98@gmail.com  
jpcipriani@gmail.com; andre.meurer.p@gmail.com; rodrigovie@gmail.com; vfmontagner@gmail.com

**Resumo**—Este trabalho tem como objetivo o controle de corrente de uma planta constituída por um filtro LC e uma carga resistiva. Para tanto, foi utilizada a técnica de realimentação de estados, típico de controle moderno. Primeiramente, o circuito proposto é modelado no espaço de estados, tendo verificada a sua controlabilidade. Posteriormente, a partir das especificações da resposta transitória, foram projetados os ganhos do controlador afim de atender requisitos de regime permanente. O projeto do controlador é realizado em espaço de estados, em um procedimento de duas etapas. Os resultados de simulação utilizando o regulador quadrático linear demonstram superioridade, tanto em regime permanente quanto na dinâmica transitória, quando comparado a um projeto baseado em alocação de polos.

## I. INTRODUÇÃO

A abordagem no espaço de estados permite a modelagem de conversores de potência, a avaliação de sua controlabilidade e a síntese de leis de controle que levam a desempenhos ótimos em termos de tempo de resposta mínima, energia de controle mínima, etc. [1]-[2].

Pela teoria de controle moderno, o regulador quadrático linear (LQR) é um controlador ótimo que minimiza a função custo, dada por  $\int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$  [3]. Esta função pode ser associada com a energia dos estados e a energia do controle. Usualmente, os valores dos elementos das matrizes Q e R são escolhidos por método iterativo - tentativa e erro, empregando o conhecimento acerca do sistema a ser controlado. O número de elementos das matrizes Q e R dependem da dimensionalidade do vetor de estados e do número de entradas. Quando os elementos das matrizes são escolhidos, o ganho da lei de controle ótimo, por realimentação de estados, é dado diretamente pela solução da equação de Riccati [1], e pode ser resolvido por meio de pacotes computacionais especializados, como a função *lqr*, do *Matlab* [4].

Este trabalho apresenta o projeto dos ganhos de um controlador por realimentação de estados, traçando uma comparativo entre as técnicas de alocação de polos e LQR, a partir do modelo de espaço de estados de um filtro capacitivo-indutivo (LC) com carga resistiva na saída. Após a obtenção do modelo, o projeto foi realizado a partir das especificações de desempenho da resposta transitória (sobressinal percentual e tempo de

acomodação), bem como do erro em regime permanente para referência constante de corrente.

## II. MODELAGEM DO PROBLEMA

Considere o circuito da Figura 1 foi tomado como o sistema proposto para este trabalho.

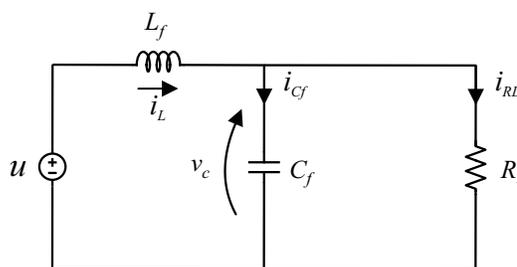


Figura 1. Circuito base para a obtenção do modelo no espaço de estados.

Este circuito possui dois elementos armazenadores de energia, um indutor e um capacitor. Assim, as variáveis de estado são representadas pela tensão do capacitor  $C_f$ ,  $v_c$ , e a corrente no indutor  $L_f$ ,  $i_L$ .

Para encontrar o modelo no espaço de estados, é necessário a obtenção das equações das derivadas no tempo das variáveis estado, ou seja:  $\dot{i}_L$  e  $\dot{v}_c$ .

Aplicando a lei de Kirchhoff das tensões na malha da entrada, temos

$$u - L_f \dot{i}_L - v_c = 0. \quad (1)$$

A equação (1) pode ser reescrita como

$$\dot{i}_L = \frac{-1}{L_f} v_c + \frac{1}{L_f} u. \quad (2)$$

Aplicando a lei de Kirchhoff das correntes no nó do capacitor  $C_f$ , tem-se (3), em que  $i_{RL}$  é a corrente que circula na carga  $R_L$ , que pode ser definida pela tensão no capacitor, que está associado em paralelo com o resistor, dividido por  $R_L$ , conforme mostrado na equação abaixo

$$i_L = C_f \dot{v}_c + i_{R_L}. \quad (3)$$

Reescrevendo (3), tem-se

$$\dot{v}_c = \frac{1}{C_f} i_L - \frac{1}{R_L C_f} v_c. \quad (4)$$

Para este trabalho, é considerado que a saída do sistema é a corrente que flui na carga resistiva. Logo, a representação em espaço de estados do circuito da Figura 1 pode ser dada pelas seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_L C_f} & \frac{1}{C_f} \\ \frac{1}{L_f} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_f} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_L} & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix}.$$

Se o sistema é totalmente controlável, os polos de malha fechada do sistema podem ser alocados em qualquer posição desejada através de um vetor de ganhos de realimentação de estados adequadamente projetado [2].

Pela teoria de controle, a matriz de controlabilidade para um sistema de segunda ordem é dada por

$$C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Substituindo as matrizes A e B dadas em (5) e simplificando, tem-se que

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_f C_f} \\ \frac{1}{L_f} & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

A controlabilidade do sistema é então verificada através do cálculo do determinante da matriz de controlabilidade  $C$ .

$$|C| = 0 - \frac{1}{L_f^2 C_f} \quad (8)$$

Observa-se que o determinante da matriz de controlabilidade, explicitada em (6) será sempre diferente de zero para quaisquer valores realizáveis de  $L_f$  e  $C_f$  e que a carga  $R_L$  não interfere na controlabilidade deste sistema. Ainda, o posto da matriz de controlabilidade é igual a 2, ou seja, a quantidade de linhas ou colunas as quais são linearmente independentes é igual a 2.

Como o posto da matriz é igual ao número de estados, conclui-se que o sistema é controlável para quaisquer valores de  $L_f$  e  $C_f$ .

### III. PROJETO DO CONTROLADOR

Suponha que a planta da Figura 1 possua os parâmetros apresentados na Tabela I, bem como as especificações de desempenho de resposta transitória e em regime permanente, sendo que  $M_P$  é a ultrapassagem percentual (*overshoot*),  $t_s$  é o tempo de acomodação e  $e_{ss}$  é o erro em regime permanente.

Deve-se projetar os ganhos de controle de maneira que o sistema se comporte com os parâmetros estabelecidos segundo a lei de controle dada por (9), em que K é o vetor de ganhos

Tabela I  
PARÂMETROS DE PROJETO

Parâmetro	Valor
$R_L$	2 $\Omega$
$C_f$	47 $\mu\text{F}$
$L_f$	1,2 mH
$M_P$	< 10 %
$t_s$	< 0,5 s
$e_{ss}$	< 10 %

de controle, o qual auxilia na melhoria da resposta transitória e  $\Gamma$  é um ganho escalar que permite a melhora da resposta em regime permanente.

O sistema de controle com a lei (9) pode ser representado como na Figura 2.

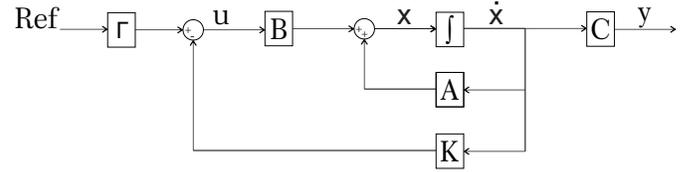


Figura 2. Diagrama de blocos da representação da lei de controle.

$$u = -Kx + \Gamma Ref \quad (9)$$

A seguir, o vetor de ganhos K é projetado utilizando as técnicas de alocação de polos e LQR e o ganho  $\Gamma$  é encontrado de maneira heurística. A validação do projeto é feita posteriormente, na seção IV.

#### A. Projeto do vetor de ganhos K

Para atender as especificações da Tabela I, é preciso encontrar a equação característica desejada em malha fechada, a qual é dada por

$$Q(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (10)$$

onde  $\zeta$  é o fator de amortecimento e  $\omega_n$  é a frequência natural do sistema. As equações (11) e (12) definem  $\zeta$  e  $\omega_n$  a partir de  $M_P$  e  $t_s$ .

$$\zeta = \frac{-\ln(M_P)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_P)}} \quad (11)$$

$$\omega_n = \frac{4}{t_s} \quad (12)$$

Adotando  $M_P$  como 8% e  $t_s$  0,3 s, tem-se que os valores de  $\zeta$  e  $\omega_n$  são, respectivamente, 0,6266 e 21,28 rad/s.

1) *Projeto por Alocação de Polos*: A matriz de estados do sistema em malha fechada é dada por A-BK.

A equação característica desejada do sistema, após a substituição dos valores de (11) e (12), é dada por

$$Q_{desejada}(s) = s^2 + 26,67s + 452,84. \quad (13)$$

Portanto, os polos requeridos em malha fechada são, respectivamente:  $p_1 = -13,3350 + 16,5837i$  e  $p_2 = -13,3350 - 16,5837i$ .

A equação característica do sistema com a inclusão do vetor de ganhos  $K$ , é encontrada a partir do cálculo do determinante de  $A-BK$

$$|sI(2) - (A - BK)| = 0. \quad (14)$$

em que  $I(2)$  representa a matriz de identidade de segunda ordem.

O desenvolvimento da equação (14) resulta em

$$s^2 + s[K_2 + 1,06 \times 10^4] + 1,06 \times 10^4 K_2 - 2,13 \times 10^4 K_1 - 1,78 \times 10^7 = 0. \quad (15)$$

Comparando (15) com (13), tem-se que os ganhos de controle que resolvem o projeto por alocação de polos são calculados como  $K_1 = 5,3670$  e  $K_2 = -12,7340$ .

No MATLAB© [4], estes ganhos podem ser encontrados utilizando o comando *Acker*, por meio da seguinte sintaxe:  $K = Acker(A,B,P)$ , em que  $P$  são os polos desejados em malha fechada e  $K$  é o vetor de ganhos que garante as especificações da resposta transitória.

2) *Projeto do vetor K por LQR*: A utilização da técnica de controle ótimo LQR para o problema em foco neste artigo possui o mesmo objetivo da técnica de alocação de polos, ou seja, encontrar os ganhos  $K$  que atendam a uma boa resposta transitória.

De acordo com a literatura, a escolha dos valores de  $Q$  e  $R$  é feita, na maioria das ocasiões, de maneira heurística, ou seja, tentativa e erro. Após escolher  $Q$  e  $R$ , testes são feitos para verificar, por exemplo, se a resposta transitória do sistema é satisfatória. Outra maneira de arbitrar  $Q$  e  $R$ , é estabelecer um compromisso (*tradeoff*) entre o sinal que se deseja controlar (neste caso a corrente na carga) e a máxima excursão do sinal da ação de controle  $u$ , já que esta última pode implicar em problemas como a saturação da amplitude do sinal do atuador.

No MATLAB© [4], o projeto de um LQR é feito por meio do comando *lqr*, o qual possui a sintaxe:  $[K,S,E] = lqr(A,B,Q,R)$ , em que  $K$  é o ganho de realimentação de estados,  $E$  são os autovalores da matriz de estados em malha fechada e  $S$  é a solução da equação de *Riccati*, dada por (16), conforme [5].

$$A^T S + SA - SBR^{-1}(B^T S) + Q = 0 \quad (16)$$

$K$  é obtido de (16), usando a equação (17).

$$K = R^{-1}(B^T S) \quad (17)$$

Uma vez que a matriz  $Q$  relaciona a importância relativa de uma variável de estado em relação a outra, neste trabalho a maior importância é atribuída a tensão no capacitor, já que esta produzirá uma diferença de potencial na carga e por consequência, a corrente que deseja-se controlar.

A Tabela II, apresenta um conjunto de valores arbitrados para  $Q$  e  $R$ , os valores obtidos para  $K$  e os autovalores  $E$

em malha fechada, utilizando o comando *lqr*. Cada linha da Tabela II representa um projeto diferente para o LQR. Note que à medida que  $R$  aumenta, o valor dos ganhos de controle diminuem, como previsto por (17), sendo que o peso  $R$ , no problema do LQR, pode ser usado para reduzir os ganhos de controle e, assim, reduzir a intensidade do sinal de controle. Entretanto, menor energia de controle implica em geral em resposta transitória mais lenta, conforme pode ser verificado comparando os autovalores de malha fechada, nas linhas 2 e 3 da tabela, por exemplo.

Tabela II  
GANHOS  $K$  OBTIDOS COM LQR

$Q_1$	$Q_2$	$R$	$K_1$	$K_2$	$E$
1	1	1	0	1	$-8,2465 \times 10^3, -3,225 \times 10^3$
100	1	1	2,9280	12,27	$-1,0431 \times 10^4 \pm 0,8343i \times 10^4$
1	1	100	-0,0002	0,0128	$-8,567 \times 10^3, -2,083 \times 10^3$
430	1	10	1,4018	8,4666	$-8,847 \times 10^3 \pm 6,2750i \times 10^3$

### B. Projeto do ganho $\Gamma$

Com a finalidade de satisfazer os requisitos de desempenho do sistema, o vetor de ganho  $K$  foi calculado para atender o transitório e estabilidade deste sistema, desconsiderando o erro em regime permanente. Portanto, um ganho  $\Gamma$  é projetado para o rastreamento de referência.

Seja a função de transferência do sistema representado na Figura 2, dada por

$$Y(s) = C(sI - (A - BK))^{-1} B \Gamma R(s) \quad (18)$$

em que,  $R(s)$  é o sinal de referência no domínio da frequência.

Assim, escolhendo um degrau unitário como referência do sistema, o valor de regime permanente pode ser dado por (19).

$$y_{RP} = \lim_{s \rightarrow 0} sC(sI - (A - BK))^{-1} B \Gamma \frac{1}{s} \quad (19)$$

Em que,  $y_{RP}$  é o valor requerido em regime permanente da saída do sistema.

Isolando a variável  $\Gamma$ , obtêm-se

$$\Gamma = \frac{y_{RP}}{C(sI - (A - BK))^{-1} B} \quad (20)$$

Desta forma, o presente artigo propõe uma estratégia de projeto em duas etapas: projeta-se o ganho  $K$ , para atender as especificações de transitório do problema, e depois, conhecido o ganho  $K$ , projeta-se o ganho  $\Gamma$ , para atender a especificação de erro de regime permanente. Como o sistema não possui integrador, obter erro suficientemente pequeno de regime permanente depende da escolha apropriada de  $\Gamma$ .

## IV. RESULTADOS

A referência especificada aqui foi de uma corrente constante de 1 A. Para visualizar o comportamento do sistema em malha fechada, a função *step* do MATLAB© [4] foi utilizada com a seguinte sintaxe

$$[y, t, x] = \text{step}(\text{sys}). \quad (21)$$

A função *step* retorna a saída  $y$ , o vetor de tempo  $t$  usado na simulação e as trajetórias dos estados  $x$ .

A partir dos valores retornados pela função *step*, e com a lei de controle definida pela equação (9), a visualização das formas de onda foi feita utilizando o comando *plot*.

O comportamento da resposta a uma referência em degrau de 1 A para o projeto por alocação de polos e por LQR é mostrado na Figura 3, onde é possível observar que todos os projetos respeitam as especificações de desempenho da Tabela I.

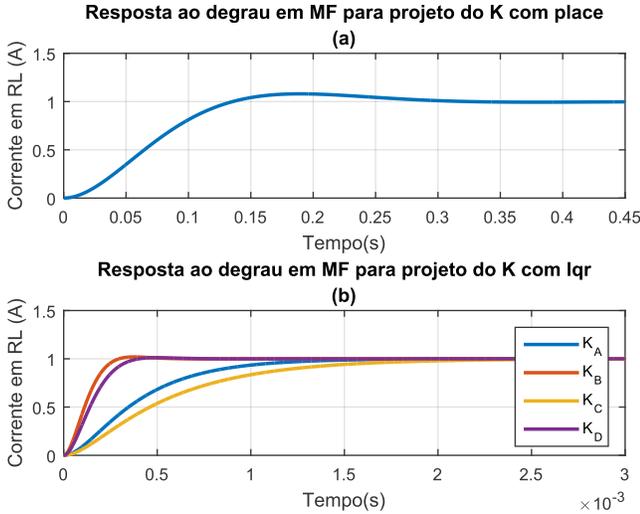


Figura 3. Resposta ao degrau para uma referência de corrente de 1 A. (a) com a função *place* do MATLAB®, (b) com LQR.

sendo  $K_A=[0 \ 1]$ ,  $K_B=[2,9280 \ 12,27]$ ,  $K_C=[-0,0002 \ 0,0128]$ ,  $K_D=[1,4018 \ 8,4666]$ .

Para a melhor visualização dos dados da Figura 3, a Tabela III resume os valores de *overshoot* e tempo de acomodação obtidos para diferentes valores de  $Q$  e  $R$  da técnica LQR, mostrados na Tabela II.

Tabela III  
DESEMPENHO OBTIDO COM LQR

K	$\Gamma$	$Q_1$	$Q_2$	R	$M_P(\%)$	$t_s(\text{ms})$
$K_A$	3	1	1	1	0	1,37
$K_B$	20,1246	100	1	1	1,97	0,27
$K_C$	2,0125	1	1	100	0	2,01
$K_D$	13,2703	430	1	10	1,19	0,358

A Figura 4 ilustra a ação de controle para os projetos utilizando o LQR. É observada a alteração na amplitude da ação de controle  $u$  a medida que os parâmetros  $Q$  e  $R$  são alterados, ou seja, para que os estados atinjam o regime permanente com maior rapidez, a ação de controle é penalizada, o que pode acarretar em problemas na implementação devido a limitações do atuador.

A partir do compromisso entre a ultrapassagem percentual, tempo de acomodação e amplitude do sinal de controle, o

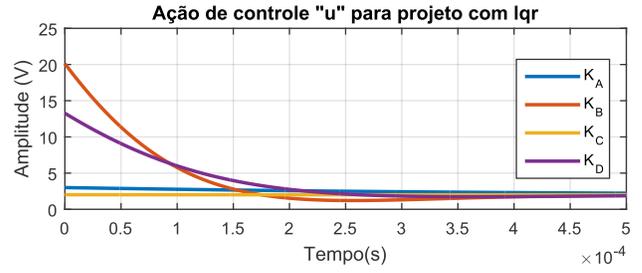


Figura 4. Ação de controle para os ganhos projetados com LQR.

ganho  $K_A$  foi escolhido como o projeto que mais se adequa aos requisitos, como ilustrado pela Figura 5. É importante observar que este ganho de controle tem um dos elementos iguais a zero, representando na prática que a implementação deste controlador não demandaria um dos sensores (no caso  $v_c$ ). Este ganho é um caso particular, que representa uma realimentação parcial de estados.

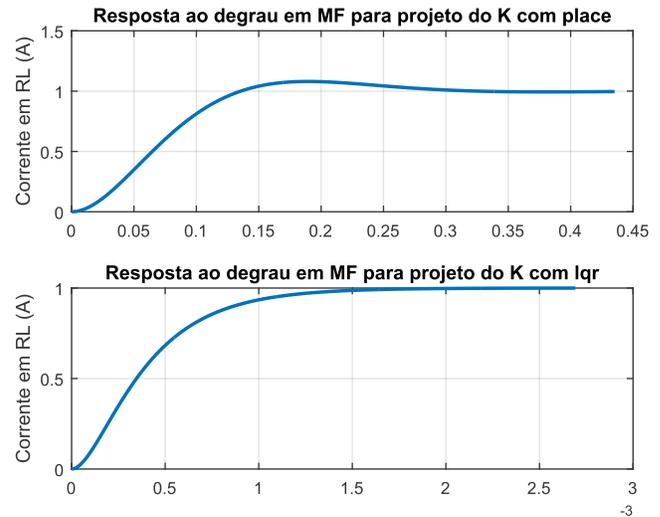


Figura 5. Resposta ao degrau para uma referência de corrente de 1 A.

As Figuras 6 e 7 mostram a trajetória dos estados e a ação de controle  $u$  para o projeto com alocação de polos e com LQR escolhidos.

Pela Figura 6, é possível perceber que apesar da resposta do sistema utilizando o método LQR seja consideravelmente mais rápida, se comparado ao método de alocação de polos, seu sinal de controle não difere muito em amplitude, como ilustra a Figura 7, verificando a eficácia do método LQR.

#### A. Incerteza paramétrica

A fim de demonstrar a robustez do controlador projetado por meio do método LQR, considerou-se uma incerteza paramétrica incrementando a resistência da carga em 10% e verificou-se o desempenho do sistema para o controlador projetado pelo método de alocação de polos (comando *place* do *Matlab*) e LQR (comando *lqr* do *Matlab*). Os ganhos da Tabela III utilizados anteriormente foram mantidos e o comportamento do sistema foi analisado.

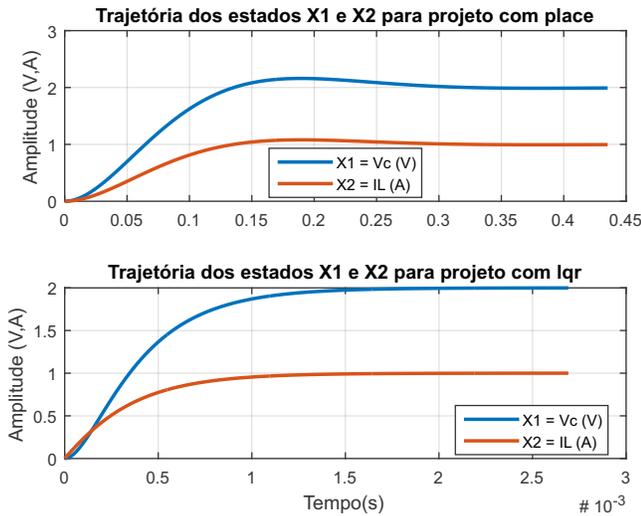


Figura 6. Trajetória dos estados  $v_c$  e  $i_L$ . (a) com a função *place* do MATLAB©, (b) com LQR.

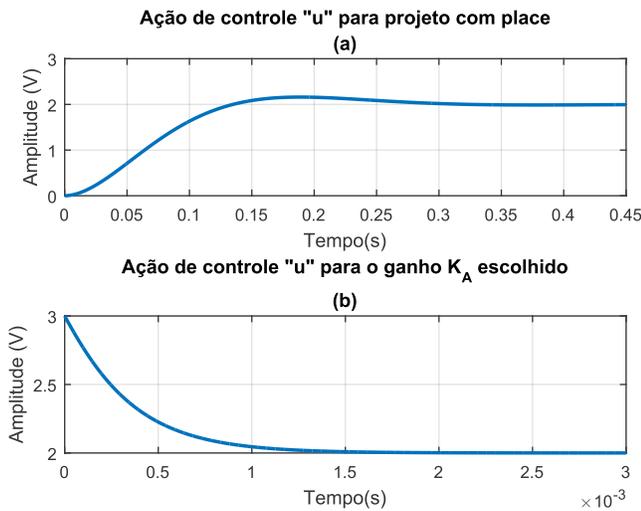


Figura 7. Ação de controle  $u$ . (a) com a função *place* do MATLAB©, (b) com LQR.

A Figura 8 ilustra a corrente no resistor de carga  $R_L$ . É possível observar que o controlador obtido utilizando o comando *place* leva à instabilidade do sistema, enquanto o controlador projetado por meio do método LQR apresenta uma resposta similar àquela da Figura 5, com uma pequena margem de erro da referência requerida, caracterizando pouca variação frente a incertezas paramétricas e, portanto, maior robustez se comparado ao *place* utilizado.

A Figura 9 apresenta o comportamento dos estados do sistema para resposta ao degrau. Analisando tal situação, verifica-se que os dois estados da planta tendem à instabilidade pelo ganho projetado pelo método da alocação de polos, enquanto o ganho projetado pelo método LQR apresenta um comportamento equivalente ao apresentado na Figura 6.

Por último, uma ilustração que apresentada os sinais de controle pelo ganho utilizando *place* e o ganho do LQR é

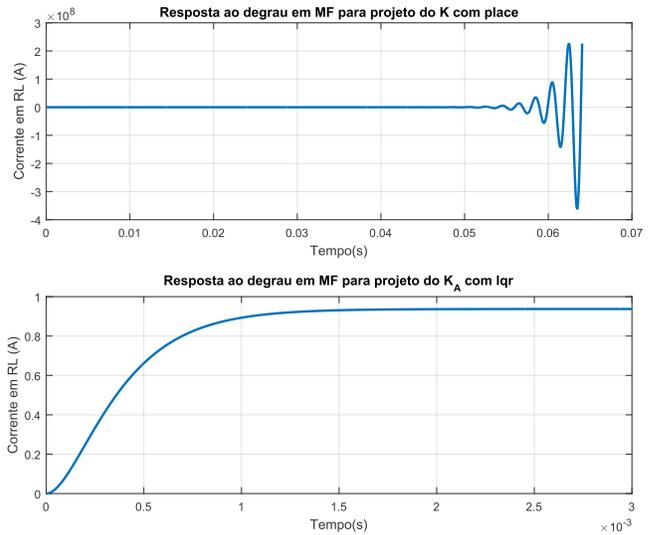


Figura 8. Resposta ao degrau para uma referência de corrente de 1 A.

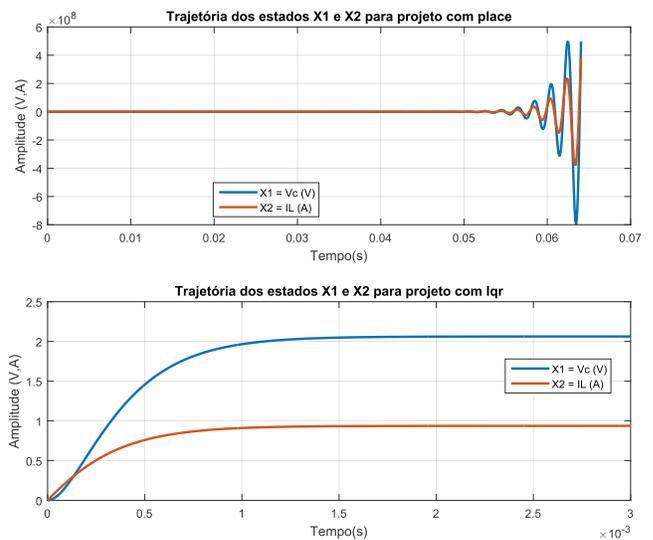


Figura 9. Trajetória dos estados  $v_c$  e  $i_L$ . (a) com a função *place* do MATLAB©, (b) com LQR.

apresentado na Figura 10. Percebe-se que o ganho do *place* claramente faz com que o sinal de controle se torne instável, fazendo com que os estados tendam à instabilidade. Entretanto a ação de controle encontrada pelo método LQR permanece limitada, indicando um controlador viável.

Conclui-se pelas Figuras 8, 9 e 10 que o controlador projetado pelo método LQR demonstra boa robustez frente a incertezas paramétricas de carga.

## V. CONCLUSÕES

Um controlador por realimentação de estados foi projetado utilizando a técnica do regulador linear quadrático (LQR). As respostas do sistema em malha fechada exibiram boa qualidade, inclusive confirmando a robustez a incertezas paramétricas. A principal dificuldade encontrada foi estabelecer

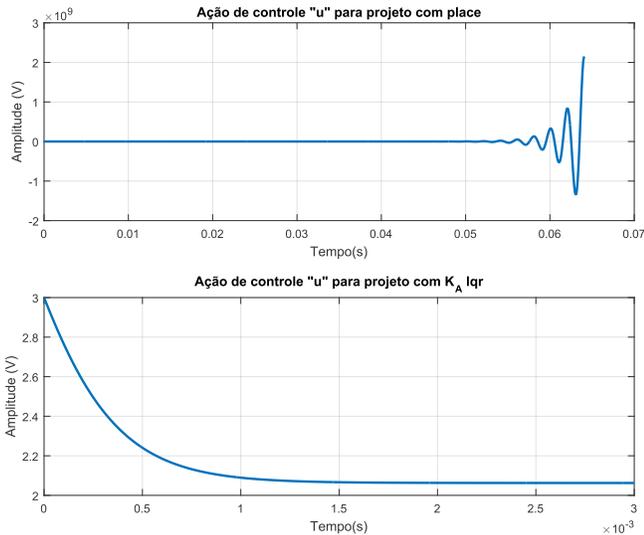


Figura 10. Ação de controle  $u$ . (a) com a função *place* do MATLAB®, (b) com LQR.

uma relação a escolha de  $Q$  e  $R$  e a dinâmica do sistema de controle.

Os resultados obtidos demonstram a eficácia do método LQR para o controle da corrente de carga de um filtro LC, haja vista que a ação de controle foi capaz de fazer com que o sinal de corrente de referência constante de 1 A fosse rastreado dentro dos padrões especificados para a resposta transitória e para a resposta em regime permanente.

Para verificar a robustez do controlador, foi aplicada uma variação de 10% na carga resistiva do circuito, a fim de emular uma incerteza paramétrica na carga. Foi possível verificar que tanto os estados, como a saída e a ação de controle do sistema, quando aplicado o controlador projetado pelo método LQR, não sofreram alterações significativas, demonstrando que esta estratégia apresenta boa robustez.

Como sugestão de trabalho futuros, uma ação de controle integral no erro poderia ser incluída na representação de espaço de estados. Essa modificação garante um alto ganho na frequência zero, conseqüentemente o valor do erro é nulo em regime permanente, ao custo de aumentar a complexidade do projeto do controlador LQR, devido à inclusão de um estado adicional.

Na prática, a planta aqui estudada pode representar o estágio de saída de um conversor CC-CC do tipo *buck*. O sinal de controle  $u$  é implementado na forma PWM (*Pulse Width Modulation*), sendo que a limitação da amplitude e da banda passante do sinal devem ser consideradas no projeto da lei de controle, o que pode ser atingido por escolha adequada das matrizes  $Q$  e  $R$  do LQR, a fim de adequar a excursão do sinal com as características construtivas do modulador.

## VI. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES/PROEX) - Código de Financiamento 001 e

do Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em Geração Distribuída (INCT-GD) - CNPq processo no. 465640/2014-1, 423405/2018-7, 425155/2018-8, 308776/2018-6; CAPES 23038.000776/2017-54 e FAPERGS 17/2551-0000517-1.

## REFERÊNCIAS

- [1] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, ser. Instrumentation and controls series. Prentice Hall, 2010. [Online]. Available: <https://books.google.com.br/books?id=Wu5GpNAelzkC>
- [2] G. F. Franklin, D. J. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 4th ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall PTR, 2001.
- [3] R. A. Michurin and A. Schagin, "Increase the accuracy of the dc motor control system with a linear-quadratic regulator," in *2018 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus)*, Jan 2018, pp. 1746–1749.
- [4] MATLAB, *version 8.6 (R2015b)*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2015.
- [5] A. Ashraf, W. Mei, L. Gaoyuan, Z. Anjum, and M. M. Kamal, "Design linear feedback and lqr controller for lateral flight dynamics of f-16 aircraft," in *2018 International Conference on Control, Automation and Information Sciences (ICCAIS)*, Oct 2018, pp. 367–371.